Statistische Physik

Hausübung, Blatt 6 **WiSe 2018/19** **Abgabe: 29.11.2018**

[H11] Doppelbesetzungs-Statistik **(6 Punkte)**

Betrachten Sie ein "Gas" nicht-wechselwirkender ununterscheidbarer Teilchen mit nicht-entarteten diskreten Energie-Eigenwerten ϵ_j, $j = 1, 2, \ldots, J$, in dem jedes Energieniveau von keinem, einem oder zwei, *aber nicht mehr* Teilchen besetzt werden kann.

(a) Nehmen Sie zunächst an, dass nur ein einziges Energieniveau ϵ_j zugänglich ist. Dann muss sich jedes vorhandene Teilchen auf dem Energieniveau ϵ_j befinden, und der einzige Freiheitsgrad des System ist die Anzahl N existenter Teilchen. Bestimmen Sie die großkanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}_j$ bei gegebener Temperatur τ und gegebenem chemischen Potential μ.

(b) Betrachten Sie jetzt alle Energieniveaus $j = 1, 2, \ldots, J$. Sei $\mathcal{Z}$ die entsprechende großkanonische Zustandssumme. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 \ldots \mathcal{Z}_J \,. \tag{1}$$

Dies bedeutet, dass die Energieniveaus als unabhängige Systeme betrachtet werden können. Der Zustand jedes einzelnen Systems ist durch seine Besetzungszahl charakterisiert.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Besetzungszahl $f(\epsilon_j)$ für das Energieniveau ϵ_j.

(d) Es sei $f_{\mathrm{c}}(\epsilon) = \mathrm{e}^{-(\epsilon-\mu)/\tau}$ der „klassische" Erwartungswert für die Besetzungszahl der Energieniveaus ϵ. Zeigen Sie, dass $f(\epsilon) \to f_{\mathrm{c}}(\epsilon)$ für $(\epsilon - \mu)/\tau \to \infty$.

(e) Ist das System äquivalent zu einem System von Fermionen mit den gleichen Energieniveaus, bei dem aber nun jedes Energieniveau Multiplizität 2 hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie für ein einzelnes Energieniveau die Zustandssumme und den Erwartungswert der Besetzungszahl berechnen.

Bitte wenden

[H12] Poisson-Verteilung **(6 Punkte)**

Betrachten Sie ein ideales Gas ununterscheidbarer Teilchen. Die kanonische Zustandssumme bei Temperatur τ und fester Teilchenzahl N sowie festem Volumen V ist

$$Z_N = \frac{1}{N!}(n_{\mathrm{Q}}V)^N \,, \tag{2}$$

wobei n_{Q} die Quantenkonzentration ist.

(a) Nehmen Sie an, das Gas befinde sich im thermischen und diffusiven Gleichgewicht, mit Erwartungswert n für die Teilchendichte und festem Volumen V. Es sei $P(N)$ die Wahrscheinlichkeit, genau N Teilchen vorzufinden. Zeigen Sie, dass

$$P(N) = \frac{(nV)^N \,\mathrm{e}^{-nV}}{N!} \,. \tag{3}$$

Dies ist die Poisson-Verteilung.

(b) Zeigen Sie, dass tatsächlich

$$\sum_{N=0}^{\infty} P(N) = 1 \qquad \text{und} \qquad \sum_{N=0}^{\infty} N P(N) = nV \,. \tag{4}$$